Le calcul au collège

Les nouveaux programmes de mathématiques de l'école primaire, qui entrent en application à la rentrée 2004 en CM2, vont être prolongés au collège à la rentrée 2005 par de nouveaux programmes, encore en projet, qui insistent beaucoup plus que par le passé – dans la continuité des programmes de l'école primaire – sur la construction mathématique du calcul numérique et du calcul algébrique.
Les difficultés constatées des élèves en classe de seconde (transformation et simplification d'expressions algébriques, calcul sur les fonctions) puis dans le cycle terminal du lycée (calcul différentiel et intégral, limites) montrent l'importance d'un bon enseignement du calcul et la nécessité d'une réflexion approfondie sur la construction des apprentissages et les pratiques enseignantes au collège.

Les pratiques pédagogiques

On observe souvent des pratiques contestables, surtout dans les champs « travaux numériques » et « organisation et gestion de données - fonctions » :

• passage de l'étude de quelques exemples à une règle générale ;
• présentation de notions à partir de situations débouchant sur un énoncé mathématique dont le statut n'est pas explicité ;
• travail technique excessif non adossé à une réflexion didactique ;
• inversement, travail technique insuffisant ne permettant pas l'assimilation des outils ;
• distorsion préjudiciable à la cohérence d'ensemble du cours de mathématiques dans la place accordée au raisonnement et à la démonstration selon qu'on se situe dans le domaine numérique ou dans le domaine géométrique.

Le souci louable de parvenir à ce que les élèves maîtrisent les techniques de calcul ne doit pas conduire à n'utiliser que des exercices *purement* techniques. Il est souhaitable que l'acquisition de ces compétences se fasse aussi par la résolution de problèmes.

Les activités proposées aux élèves

Le terme « activité » recouvre à la fois l'activité intellectuelle de l'élève : mise de l'élève en activité qui est le but de tout enseignement et un exercice fondé sur une situation mathématique : activité d'approche, activité préparatoire, activité de recherche, etc., le plus souvent menée en classe.
Dans le projet de programme, on peut lire :
« La compréhension et l'appropriation des connaissances mathématiques reposent sur l'activité de chaque élève qui doit donc être privilégiée. Pour cela, sont choisies des situations créant un problème dont la solution fait intervenir des "outils", c'est-à-dire des techniques ou des notions déjà acquises, afin d'aboutir à la découverte ou à l'assimilation de notions nouvelles. Lorsque celles-ci sont bien maîtrisées, elles fournissent à leur tour de nouveaux "outils", qui permettent un cheminement vers une connaissance meilleure ou différente. Ainsi, les connaissances prennent du sens pour l'élève à partir des questions qu'il se pose et des problèmes qu'il résout.
Les activités choisies doivent :

• permettre un démarrage possible pour tous les élèves, donc ne reposer que sur des consignes simples et n'exiger, au départ, que des connaissances solidement acquises par tous ;

• créer rapidement une situation assez riche pour provoquer des conjectures ;
• rendre possible la mise en jeu des notions dont l'apprentissage est visé ;

• fournir aux élèves, aussi souvent que possible, des occasions de contrôle de leurs résultats, tout en favorisant un nouvel enrichissement ; on y parvient, par exemple, en prévoyant divers cheminements qui permettent de fructueuses comparaisons. »

Cette explicitation figurait déjà dans le programme actuel mais sa position a été revalorisée : du bandeau de la classe de sixième, elle est passée à l'introduction générale pour le collège.
Trop souvent, l'activité des élèves est faible et la recherche n'a pas la place qu'elle devrait avoir. Il faut donc dépasser le cadre des activités pour elles-mêmes et les insérer dans un processus global de recherche et d'argumentation.
Dans leur grande majorité les activités présentées dans les manuels ne remplissent pas les conditions réclamées ci-dessus, car elles sont figées, par le simple fait qu'elles y sont écrites et contiennent un découpage qui présume de leur déroulement en classe. Le professeur qui rend public ce découpage en devient prisonnier, ce qui ne lui permet pas de tirer le meilleur profit des réactions de la classe ; il est ensuite obligé de s'y astreindre, même s'il se rend compte en cours de route de son manque de pertinence. Or les professeurs doivent privilégier le plus souvent possible les situations problèmes, avec une problématisation soignée plaçant l'élève en situation d'autonomie adaptée et de recherche, gérées avec souplesse.

La démonstration

Comme il est indiqué dans l'introduction du projet de programme :

« [...] c'est à travers la résolution de problèmes, la modélisation de quelques situations et l'apprentissage progressif de la démonstration, que les élèves prennent conscience petit à petit de la nature d'une véritable activité mathématique : identifier et formuler un problème, conjecturer un résultat en expérimentant sur des exemples, bâtir une argumentation, contrôler les résultats obtenus en évaluant leur pertinence en fonction du problème étudié, communiquer une recherche, mettre en forme une solution. »

Le passage du constat à la démonstration est un processus complexe nécessitant d'être mis en place dès la classe de 6^{e} pour prendre un tour plus structuré à partir de la classe de 4^{e} : il faut combattre l'idée que la démonstration ne commence qu'en classe de 4^{e}.

Le plus souvent, pour mettre en place des démonstrations, les professeurs privilégient le domaine géométrique. Il est alors nécessaire de travailler progressivement sur la distinction des objets, le codage, la nécessité de justifier, les éléments de justification, le rôle générique de la figure, l'importance de la phase de recherche, l'argumentation et l'intérêt du débat dans la classe, les différents niveaux de preuve, la rédaction...Il est indispensable de saisir toutes les possibilités d'élaborer des démonstrations dans les domaines numériques et algébriques. Le projet de programme suggère d'ailleurs explicitement certaines justifications sur des exemples numériques génériques, qui, si l'on est bien au clair sur leur statut, permettent de préparer le passage du numérique à l'algébrique. Il demande aussi des démonstrations de résultats de cours dans le domaine algébrique.

Passer de l'expérimentation sur des exemples à la démonstration est difficile, y compris sur le plan conceptuel. Les outils informatiques peuvent jouer un rôle important pour aider à faire émerger des conjectures et pour introduire la preuve. Mais, quelle qu'en soit sa forme, c'est l'activité des élèves qui doit servir à élaborer des conjectures et à rendre visible la nécessité de la démonstration. On évitera donc que la démonstration, imposée par l'enseignant, ne devienne un modèle formel à appliquer sans compréhension.

La résolution de problèmes

C'est le cœur même de l'activité mathématique, ainsi que le rappelle le projet de programme :
« **A - Une place centrale pour la résolution de problèmes**
[...] Si la résolution de problèmes permet de déboucher sur l'établissement de connaissances nouvelles, elle est également le moyen privilégié d'en élargir le sens et d'en assurer la maîtrise. Pour cela, les situations plus ouvertes, dans lesquelles les élèves doivent solliciter en autonomie les connaissances acquises, jouent un rôle important. Leur traitement nécessite initiative et imagination et peut être réalisé en faisant appel à différentes stratégies qui doivent être explicitées et confrontées, sans nécessairement que soit privilégiée l'une d'entre elles »[1].
Résoudre des problèmes permet de donner du sens aux apprentissages et, par là-même, de susciter l'intérêt et le goût d'apprendre des élèves.
Les résultats à l'épreuve écrite du brevet des collèges, frappent par le pourcentage élevé de notes inférieures[2] à cinq sur vingt. Il semble paradoxal qu'autant de candidats ne parviennent pas à glaner davantage de points sur les traditionnels travaux numériques des épreuves alors qu'ils sont souvent très entraînés par les professeurs. Il y a lieu de réfléchir à la façon dont sont perçus ces exercices techniques hors de tout contexte : il semble que, dès lors que les élèves ont répondu, ils considèrent qu'ils ont fait leur travail et ont rarement recours à un contrôle de leurs résultats (substitution d'une valeur numérique, utilisation d'une calculatrice, prise en compte de l'ordre de grandeur, etc.). Ils sont d'ailleurs trop peu souvent invités à le faire en classe.

Le calcul numérique

Dans les évaluations officielles nationales ou internationales, on constate ces dernières années une baisse préoccupante des savoir-faire relatifs au calcul, en particulier en calcul mental et posé[3].

Les erreurs de calcul sont exploitables en cours d'apprentissage de façon constructive par l'enseignant. Mais leur présence devient un obstacle à la progression de l'élève ou du groupe, quand elles sont trop fréquentes ou quand elles manifestent le manque d'assimilation de connaissances préalables.

De nouveaux programmes

Les nouveaux programmes insistent de manière détaillée sur l'apprentissage et la maîtrise du calcul sous toutes ses formes.
Dans la dernière année du cycle des approfondissements de l'école primaire (CM2), de nouveaux programmes entreront en vigueur en 2004. Des documents d'application et un document d'accompagnement école-collège expliquent et motivent les compétences visées, en particulier en ce qui concerne la proportionnalité, les nombres entiers naturels, les fractions et les nombres décimaux[4]. Les compétences sur le calcul mental ou posé, sur le calcul automatisé sont explicitement exigibles. En particulier, ces nouveaux programmes accordent une place importante au

[1]Extrait de l'introduction générale du projet de programme

[2]Académie de Versailles 2002

répartition des notes à l'épreuve écrite du brevet (collèges publics) en pourcentage

	[0 ;5[	[5 ;10[	[10 ;15[	[15 ;20[
REP	47,44	34,49	1462	3,45
Hors REP	26,56	32,45	26,98	14,01
Ensemble	31,03	32,89	24,33	11,74

[3]Les résultats nationaux de l'évaluation sixième 2003 sont accessibles sur [http ://evace26.education.gouv.fr]
[4]Les nouveaux programmes de l'enseignement primaire – Mathématiques – Document d'accompagnement – Articulation école-collège – Disponible sur le site EDUSCOL : http ://www.eduscol.education.fr

calcul mental réfléchi.
Dans les projets de programmes de collège (rentrée 2005) les objectifs sur le calcul figurent clairement dans la deuxième partie « nombres et calcul ». L'acquisition et l'approfondissement des notions liées au calcul sont proposés de façon progressive. Dans les parties « grandeurs et mesures » et « statistique », le calcul intervient aussi dans des situations qui donnent du sens aux nombres, aux opérations.

Le calcul numérique au collège

Les programmes distinguent trois modes de calcul : le calcul posé, le calcul mental et le calcul instrumenté. La notion de nombre est progressivement acquise tout au long de la scolarité par la pratique conjointe de ces trois modes de calcul.
Les nombres, leurs propriétés et les techniques opératoires ont besoin d'être « manipulés », « fréquentés » par l'élève pour qu'il se les approprie progressivement.

Calcul posé

Il permet de garder le contact le plus direct avec les chiffres, entretient les automatismes, et donne en retour la satisfaction d'une maîtrise totale du résultat. Il favorise le raisonnement sur les nombres et leurs opérations. En sixième, il est en première ligne quant à l'étude de la division décimale.

Calcul mental

Il est une façon spécifique de lier calcul et raisonnement. Il exige pour être pratiqué l'acquisition de certains mécanismes immédiatement disponibles, tant opératoires (distinction entre les diverses opérations) que factuels (table de multiplication). L'acquisition de ces mécanismes est en retour un outil indispensable de connaissance des nombres.
Le calcul mental se travaille, se réfléchit, se raisonne. Les procédures de calcul sont souvent multiples : leur usage répété un grand nombre de fois sur des exemples numériques ainsi que le choix de la plus opportune d'entre elles contribuent à préparer l'élève à des tâches de calcul raisonné plus complexes. La comparaison des procédures utilisées sur des exemples numériques prépare les élèves aux propriétés des opérations (commutativité, distributivité) en vue du calcul algébrique. Le calcul mental est aussi un moyen de contrôle et d'anticipation, ainsi qu'une aide à la résolution de problèmes.
Le calcul mental se décline sur les deux domaines du calcul exact et du calcul approché (en ordres de grandeur). Dans les deux cas, mais dans le second en particulier, il entretient un lien privilégié avec l'initiation au raisonnement.

Calcul instrumenté

Le calcul instrumenté est complémentaire du calcul mental et du calcul posé, mais il ne peut les remplacer.
L'usage de machines permet une exploration plus vaste, plus variée, plus rapide de l'ensemble des nombres, de leurs relations et des opérations. La calculatrice dispense pour un temps l'élève de l'effort du calcul effectif, manuel ou posé, et facilite ainsi cette exploration. Mais, employée sans une préparation et un encadrement adaptés ou comme supplétif d'une compétence de calcul non maîtrisée, elle peut priver l'élève de manipulation des nombres et d'une réflexion sur les résultats.

On trouve aussi sur ce site deux documents d'accompagnement concernant le calcul mental et le calcul posé.

En conclusion, l'usage de la calculatrice doit être bien réparti dans le temps ; l'équilibrage entre les divers modes de calcul demande un arbitrage délicat. Les trois modes de calcul sont à mettre en oeuvre de front et sur plusieurs registres, en particulier dans la résolution de problèmes.

La découverte progressive des nombres

Au cours de la scolarité obligatoire l'apprentissage des nombres et des opérations est en jeu à chaque niveau. En sixième, une reprise sur l'écriture décimale est nécessaire, en situation. Il s'agit de solliciter en permanence la compréhension des écritures décimales et d'éviter d'aller trop rapidement vers l'utilisation de techniques non justifiées.

À chaque niveau, il ne faut pas oublier que la notion de nombre n'est jamais définitivement acquise, et que les allers et retours entre l'aspect intuitif lié à certaines mesures (quantité d'objets, longueurs, ...) et le concept de nombre continuent tout au long de la progression scolaire depuis le CP.
La découverte raisonnée des nombres passe par d'autres parties de l'enseignement des mathématiques : la statistique, la géométrie offrent aussi des champs de problèmes qui contribuent de façon significative à cette découverte, par exemple, avec le calcul de longueurs, d'aires et de périmètres.

Alors qu'elle occupe une place limitée à l'école primaire, l'écriture fractionnaire prend une place centrale au collège : c'est un des outils essentiels pour le traitement de nombreux problèmes, par exemple pour la proportionnalité et pour les grandeurs quotients. Cette écriture représente un nombre...et non un calcul à effectuer : l'élève fait un pas important vers l'idée de nombre lorsqu'il accepte cela, comme ce sera également le cas avec les nombres relatifs, puis avec les radicaux : l'usage excessif des calculatrices qui incite à tout ramener à des « nombres en ligne » n'y aide pas.

Pour conclure, sur l'apprentissage des nombres au cours de la scolarité obligatoire voici deux suggestions :

- Il faut que l'enseignant garde constamment à l'esprit la nécessité de lier à chaque instant compréhension, sens, raisonnement d'une part, et d'autre part techniques, règles, tables et vocabulaire, c'est à dire ce qui est du domaine de la pensée, de la réflexion et ce qui est du domaine de la technique, de l'exécution. La contradiction apparente entre ces deux approches ne doit pas se résoudre seulement par un arbitrage entre les proportions de temps à y consacrer, mais aussi par une élévation en intensité de chaque moment de l'enseignement de manière à ne pas oublier ces deux approches.
- L'idée que l'élève se fait de ce qu'est un nombre doit évoluer :

- le passage aux fractions comme quotients suppose d'accepter qu'un nombre ne s'exprime pas nécessairement par une suite de chiffres ;
- le passage aux nombres négatifs suppose de renoncer au fait qu'un nombre exprime une quantité ou la mesure d'une grandeur ;
- le passage des entiers naturels aux nombres décimaux suppose de renoncer à l'idée de nombres qui se suivent et d'accepter que le processus d'intercalation soit sans fin...

Une synthèse sur les nombres est prévue en fin de collège, avec une ouverture sur les nombres irrationnels, mais c'est tout au long de la scolarité obligatoire que ces évolutions qui sont aussi des **ruptures** devraient être prises en compte.

En conclusion

Il est particulièrement important de renforcer partout où l'occasion en est offerte les liens CM2-6 ^{e}. Un objectif peut être proposé : que tous les enseignants de sixième (mieux : de collège) aient participé à un travail de réflexion en commun avec des enseignants de l'école élémentaire sur ce sujet[5], et qu'ils aient une connaissance véritable des programmes et des documents d'accompagnement du CM2.

Du calcul numérique au calcul algébrique : raisonnement et démonstration

Dans cette partie, deux exemples ont été choisis – la construction du quotient et la résolution d'équations – pour illustrer le passage du raisonnement sur des nombres aux démonstrations avec des lettres. Il ne faut pas négliger pour autant d'autres aspects fondamentaux du programme : développement et factorisation, ordre et opérations, calculs sur les radicaux ...

Des difficultés constatées

Les visites dans les classes permettent de pointer les difficultés classiques liées :

- aux différentes significations de du symbole d'égalité : égalité annonçant un « résultat », égalité de définition (formules d'aires, de volumes), identité, équation) ;
- aux différents statuts de la lettre : variable, indéterminée, inconnue ;

En général, c'est le contexte qui, implicitement, permet de fixer le statut de la lettre et il apparaît particulièrement important, en phase d'apprentissage, d'éviter d'aborder simultanément ses différents aspects. S'agissant du symbole d'égalité, il convient, dans chaque cas, d'en préciser le sens.

La construction du quotient

Dans les nouveaux programmes, la construction des savoirs concernant les quotients s'opère par une progression cohérente et continue sur les quatre années du collège, où le passage du numérique à l'algébrique est particulièrement visible. En effet, en classes de sixième et de cinquième un certain nombre de justifications de règles sont attendues sur des exemples numériques. Ces justifications ont une valeur générique en ce sens que la méthode utilisée est transférable à la démonstration générale qui sera conduite, dans le registre des écritures littérales, en classe de quatrième. Le caractère générique des exemples favorise évidemment le passage du numérique au littéral.

En classe de sixième, la définition du quotient est utilisée exclusivement dans le numérique, notamment dans les problèmes relevant du champ de la proportionnalité. On note aussi dans le programme de cette classe, que *« Le fait qu'un quotient ne change pas quand on multiplie son numérateur et son dénominateur par un même nombre est mis en évidence et utilisé »*. Du point de vue de la construction du savoir, cette mise en évidence est d'une ambition autre que la simple utilisation. Elle peut se faire au travers de situations de proportionnalité en « révélant » le coefficient de proportionnalité par exemple dans le tableau de proportionnalité suivant :

a	$k\times a$
b	$k\times b$

On a donc $\dfrac{b}{a} = \dfrac{k \times b}{k \times a}$.

[5]Par exemple, les enseignants des écoles élémentaires de leur district

La justification algébrique pourrait être :

Si $q = \dfrac{a}{b}$, cela signifie par définition que $a = b \times q$ donc $k \times a = k \times b \times q$. Le nombre $\dfrac{k \times a}{k \times b}$ est, par définition, le nombre qui multiplié par $k \times b$ donne $k \times a$: c'est donc q.

Ce raisonnement, formalisé dans le cadre algébrique, peut être envisagé en classe de quatrième ; il peut être mis en œuvre sur des exemples numériques dès la classe de sixième. apparaît prématurée à ce niveau mais l'intention d'explicitation est présente et la démonstration peut être envisagée en classe de quatrième.

De même, s'agissant de l'addition et de la multiplication des quotients, le programme de la classe de cinquième, stipule que : « *Le travail porte à la fois sur les situations dont le traitement fait intervenir le produit de deux nombres en écritures fractionnaires …et sur la justification du procédé de calcul.* » et « *Dans le cadre de la résolution de problèmes, les élèves sont confrontés à des sommes de fractions du type* 2/3 + 3/4 *: pour les traiter, ils utilisent des procédures réfléchies …mais l'objectif n'est pas d'aboutir à une règle de calcul. Celle-ci est établie en 4*^{e} ».

On note donc que le souci de justification est très présent mais que, concernant l'addition, il est repoussé à la classe de 4^e où elle est, en revanche, réclamée très nettement, les termes employés invitant clairement à une démonstration qui sollicitera inévitablement l'algèbre : de la permanence des propriétés sur les opérations (en particulier de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition) on peut déduire que
$b \times \left(\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{b}\right) = b \times \dfrac{a}{b} + b \times \dfrac{c}{b}$, ce qui donne $b \times \left(\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{b}\right) = a + c$, d'où la justification du résultat cherché à l'aide de la définition du quotient. Le passage à l'algébrique pour fournir les justifications précédemment citées est donc de mise en classe de quatrième.

Enfin, en classe de troisième, les notions de fraction irréductible et de nombre rationnel constituent un aboutissement autorisant la pratique systématique des simplifications et couronnant le travail conduit depuis la classe de sixième pour construire le statut de nombre d'un quotient.

La résolution d'équations

L'apparition de la résolution algébrique des équations constitue en classe de quatrième un lieu au sein duquel s'opère le passage d'un traitement numérique à un traitement algébrique. Pour ce passage, il apparaît nécessaire de mettre successivement en place deux types de problèmes.
Dans un premier temps, il s'agit de problèmes que les élèves savent résoudre par des procédures anciennes, numériques ou arithmétiques :
ils conduisent à des équations du type $ax + b = c$ dont la résolution s'appuie sur les définitions de la différence et du quotient à savoir $a + (b - a) = b$ et $a \times \left(\dfrac{b}{a}\right) = a$. En effet ces définitions permettent de résoudre « naturellement » $a + x = b$, $ax = b$ et même $ax + b = c$.

On peut également envisager à ce premier stade la résolution d'équations du type $ax + b = cx + d$ dans des cas particulièrement simples où la solution peut apparaître d'évidence ou après quelques tâtonnements. L'intérêt de ces recherches conduites par les élèves à l'aide de procédures non expertes, est de permettre une première familiarisation avec des équations à second membre non constant. On peut penser à des procédures d'essais-erreurs, de fausse position ou à des démarches utilisant un tableur ou une calculatrice.

Dans un deuxième temps, il s'agit de situations dont la problématisation, plus complexe, doit être soignée et où l'algébrisation devra apparaître comme indispensable. L'introduction de la méthode algébrique, lourde et déstabilisatrice pour les élèves, est alors légitimée par le fait qu'elle est la seule permettant d'atteindre la solution du problème. Cette condition nécessite de recourir à des problèmes conduisant à des équations du type $ax + b = cx + d$ dont la solution ne soit pas facilement accessible par tâtonnement.

On peut noter quelques dérives concernant

• **La mise en équation :** les exemples proposés aux élèves pour introduire la mise en équation sont trop souvent peu pertinents. Se ramenant en général à une équation de la forme $ax + b = c$, ils peuvent fréquemment être traités par de simples procédures arithmétiques, ou par un schéma, et ne motivent donc pas vraiment le recours à l'algèbre.

Ce choix permet de partir des acquis des élèves puis de mettre en évidence une rupture essentielle avec le savoir nouveau.

• **La transformation d'écritures :** l'image de la balance de Roberval, souvent utilisée, n'est plus familière aux élèves et là aussi, souvent présentée sur des exemples peu convaincants.

• **Les règles d'action souvent préconisées par les enseignants** (par exemple, mettre les « x » dans le premier membre !) : elles renforcent des automatismes gratuits alors qu'il faudrait développer une « intelligence » des calculs fondée sur l'analyse des expressions algébriques, et habituer les élèves à avoir une lecture « symétrique » des égalités.

• **Le raisonnement par équivalences** n'est pas pertinent au collège : il est préférable, pour la rédaction des démonstrations, de procéder par conditions nécessaires suivies d'une vérification qui constitue, en fait, la démonstration de l'application réciproque.

Textes et sites de référence

1. Le rapport d'étape sur le calcul de la commission Kahane (CREM) :
   http ://smf.emath.fr/Enseignement/CommissionKahane/
2. Les programmes officiels du primaire et leurs documents d'accompagnement :
   http ://www.eduscol.education.fr/D0048/r_prim.htm
3. Les futurs programmes de collège : http ://www.eduscol.education.fr/D0082/
4. Les résultats nationaux de l'évaluation sixième 2003 :
   http ://evace26.education.gouv.fr
5. Brochures Jeux 2, 5 et 6 de l'APMEP
6. « Pourquoi les mathématiques à l'école ? » de Roland Charnay ESF
7. « Apprentissage des mathématiques en cinquième » ERMEL INRP
8. « Calcul mental et automatismes » IREM de Clermont-ferrand 1994
9. « Sur l'introduction au calcul littéral » bulletin vert de l'APMEP n° 445 page 197
10. « Les débuts de l'algèbre au collège » de G.Combier, J-C. Guillaume et A. Pressiat, INRP